Całka nieoznaczona - całkowanie przez podstawienie

Oprócz wykorzystania wzorów podstawowych oraz własności, wiele całek można obliczyć korzystając z dwóch podstawowych metod całkowania: całkowanie przez podstawienie oraz całkowanie przez części. Metodę całkowania przez podstawienie stosujemy wówczas, gdy funkcja podcałkowa jest iloczynem funkcji złożonej i pochodnej jej funkcji wewnętrznej. Stosujemy tu następujące twierdzenie:

Twierdzenie. Jeżeli

1) funkcja $f : Y \to \mathbb{R}$ jest ciągła na przedziale Y,
2) funkcja $g : X \to Y$ ma ciągłą pochodną na przedziale X,

to

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = \left| \begin{array}{c} g(x)=t \\ g'(x)dx = dt \end{array} \right| = \int f(t)\,dt .$$

Przykład. Obliczyć całki:

a) $\int \cos(2x+3)dx$, b) $\int \mathrm{e}^{-5x}dx$, c) $\int \sqrt[3]{3x-1}\,dx$, d) $\int \frac{dx}{\sin^2(3-4x)}$,

Rozwiązanie.

Wszystkie te przykłady można zaliczyć do pewnego podtypu całek, które obliczamy przez podstawienie. Zauważmy, że w przykładach tych funkcją wewnętrzną funkcji podcałkowej jest funkcja liniowa. Można zatem zastosować następujące podstawienie:

$$\int f(ax+b) = \left| \begin{array}{c} ax+b=t \\ adx = dt \ \ /:a \\ dx = \frac{1}{a}dt \end{array} \right| = \frac{1}{a}\int f(t)dt .$$

a) $$\int \cos(2x+3)dx = \left| \begin{array}{c} 2x+3=t \\ 2dx = dt \\ dx = \frac{1}{2}dt \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \cos t dt = \frac{1}{2}\sin t + C = \frac{1}{2}\sin(2x+3)+C,$$

b) $$\int \mathrm{e}^{-5x}dx = \left| \begin{array}{c} -5x=t \\ -5dx = dt \\ dx = -\frac{1}{5}dt \end{array} \right| = -\frac{1}{5}\int \mathrm{e}^{t}dt = -\frac{1}{5}\mathrm{e}^{t} + C = -\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-5x}+C,$$

c) $$\int \sqrt[3]{3x-1}\,dx = \left| \begin{array}{c} 3x-1=t \\ 3dx = dt \\ dx = \frac{1}{3}dt \end{array} \right| = \frac{1}{3}\int \sqrt[3]{t}\,dt = \frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{3}}dt = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}} + C = \frac{1}{4}\sqrt[3]{t^4} + C = \frac{1}{4}\sqrt[3]{(3x-1)^4}+C,$$

d) $$\int \frac{dx}{\sin^2(3-4x)} = \left| \begin{array}{c} 3-4x=t \\ -4dx=dt \\ dx=-\frac{1}{4}dt \end{array} \right| = -\frac{1}{4}\int \frac{dt}{\sin^2 t} = -\frac{1}{4}(-\operatorname{ctg} t) + C = \frac{1}{4}\operatorname{ctg}(3-4x) + C$$

Analogicznie do powyższych przykładów można wyprowadzić ogólne wzory, przydatne przy obliczaniu niektórych typów całek:

(15) $\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$,

(16) $\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$,

(17) $\int \mathrm{e}^{ax+b}dx = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax+b} + C$.

Przykład. Obliczyć całki:

a) $\int \frac{x}{1-3x^2}dx$, b) $\int \cos^3 x \sin x dx$, c) $\int \frac{1}{x\ln^3 x}dx$,

d) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$, e) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx$, f) $\int x^2 \sqrt[3]{2x^3-1}\,dx$,

g) $\int \frac{\cos 2x dx}{\sqrt{(5-\sin 2x)^3}}dx$, h) $\int \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}dx$, i) $\int \operatorname{ctg}3x dx$.

Rozwiązanie.

a) $$\int \frac{x}{1-3x^2}dx = \left| \begin{array}{c} 1-3x^2=t \\ -6xdx=dt \\ xdx=-\frac{1}{6}dt \end{array} \right| = -\frac{1}{6}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{6}\ln|t| + C = -\frac{1}{6}\ln\left|1-3x^2\right| + C$$

b) $$\int \cos^3 x \sin x dx = \left| \begin{array}{c} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \\ \sin x dx = -dt \end{array} \right| = -\int t^3 dt = -\frac{1}{4}t^4 + C = -\frac{1}{4}\cos^4 t + C,$$

c) $$\int \frac{1}{x\ln^3 x}dx = \left| \begin{array}{c} \ln x = t \\ \frac{1}{x}dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{t^3}dt = \int t^{-3}dt = -\frac{1}{2}t^{-2} + C = -\frac{1}{2t^2} + C = -\frac{1}{2\ln^2 x} + C$$

d) $$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = \left| \begin{array}{c} \sqrt{x} = t \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = dt \\ \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2dt \end{array} \right| = 2\int \sin t dt = -2\cos t + C = -2\cos\sqrt{x} + C,$$

e) $$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}dx = \left| \begin{array}{c} x^2 = t \\ 2xdx = dt \\ xdx = \frac{1}{2}dt \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin t + C = \frac{1}{2}\arcsin x^2 + C,$$

f) $$\int x^2\sqrt[3]{2x^3-1}\,dx = \left| \begin{array}{c} 2x^3 - 1 = t \\ 6x^2dx = dt \\ x^2dx = \frac{1}{6}dt \end{array} \right| = \frac{1}{6}\int \sqrt[3]{t}dt = \frac{1}{6}\int t^{\frac{1}{3}}dt = \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}} + C =$$

$$= \frac{1}{8}\sqrt[3]{t^4} + C = \frac{1}{8}\sqrt[3]{(2x^3-1)^4} + C,$$

g) $$\int \frac{\cos 2x}{\sqrt{(5-\sin 2x)^3}}dx = \left| \begin{array}{c} 5 - \sin 2x = t \\ -2\cos 2xdx = dt \\ \cos 2xdx = -\frac{1}{2}dt \end{array} \right| = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t^3}} = -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{3}{2}}dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot(-2)t^{-\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{t}} + C = \frac{1}{\sqrt{5-\sin 2x}} + C,$$

h) $$\int \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}dx = \int \frac{\mathrm{e}^x}{1+(\mathrm{e}^x)^2}dx = \left| \begin{array}{c} \mathrm{e}^x = t \\ \mathrm{e}^x dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg}\mathrm{e}^x + C,$$

i) $$\int \operatorname{ctg}3x dx = \int \frac{\cos 3x}{\sin 3x}dx = \left| \begin{array}{c} \sin 3x = t \\ 3\cos 3xdx = dt \\ \cos 3xdx = \frac{1}{3}dt \end{array} \right| = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3}\ln|t| + C = \frac{1}{3}\ln|\sin 3x| + C.$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Znaleźć całki:

18. $\int \cos 3x dx$, **19.** $\int \mathrm{e}^{4x-2}dx$, **20.** $\int \sin(5-4x)dx$,

21. $\int \sqrt{3x-5}\,dx$, **22.** $\int \frac{1}{\sqrt[3]{2x+5}}dx$, **23.** $\int \frac{dx}{\cos^2(2x-7)}$,

24. $\int \sin^2 x\cos x\,dx$, **25.** $\int \operatorname{tg}x\,dx$, **26.** $\int \frac{x}{x^2-4}dx$,

27 $\int \frac{x}{(2x^2-3)^6}dx$, **28** $\int x\sin(2x^2+1)dx$, **29.** $\int x(x^2-7)^5dx$,

30. $\int \frac{x}{\sqrt{3-5x^2}}\,dx$,

31. $\int \frac{e^x}{2e^x+1}\,dx$,

32. $\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$,

33. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}}\,dx$,

34. $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{5+2\ln x}}$,

35. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$,

36. $\int \frac{e^{3\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx$,

37. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}$,

38. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{5+3\sin x}}$,

39. $\int \cos x\, e^{\sin x}\,dx$,

40. $\int \frac{\arccos^3 x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$,

41. $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$,

42. $\int \frac{x}{(x+3)^5}\,dx$,

43. $\int \sin x\left(1-\sqrt{\cos x}\right)^2 dx$,

Opracowanie:
dr Igor Kierkosz
dr hab. Volodymyr Sushch